第3講　微分・積分

1

[1]　次の $\boxed{}$ に適する数または式を求めよ．

xy 平面上において，放物線 $C：y=x^2+1$ 上の2点 $\mathrm{P}(p,\ p^2+1)$ $(p>0)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2+1)$ $(q<0)$ における放物線 C の接線をそれぞれ l_1，l_2 とし，l_1 と l_2 の交点 R が x 軸上にあるとする．このとき，接線 l_1 の方程式は $y=\boxed{}$ であり，q は p を用いて $q=\boxed{}$ と表され，R の x 座標は p を用いて $\boxed{}$ と表される．また，放物線 C と l_1，l_2 で囲まれた部分の面積を S とすると，p を用いて $S=\boxed{}$ であり，この面積 S を最小にする p の値は $\boxed{}$ であり，S の最小値は $\boxed{}$ である．

[2]　次の空欄に当てはまる数を答えよ．

a を実数の定数として，放物線 $C：y=-2x^2+4ax-a^2-4a+10$ を考える．

(1)　$a=\dfrac{2}{3}$ のとき，放物線 C の頂点の座標は $\left(\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}},\ \dfrac{\boxed{}\boxed{}}{\boxed{}}\right)$ である．

(2)　放物線 C と x 軸で囲まれた部分の面積は，$a=\boxed{}$ のとき最小値 $\boxed{}\sqrt{\boxed{}}$ をとる．

2　O を原点とする座標平面において，3 次関数 $y=x^3-3x$ のグラフを C とする．C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^3-3a)$ を通り，傾き k の直線を l とする．ただし，a は $a>1$ を満たす定数である．

以下の問いに答えよ．

(1)　C と l が相異なる 3 点で交わるための k の条件を求めよ．

(2)　C と l が相異なる 3 点で交わり，さらに P 以外の交点 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{R}(x_2,\ y_2)$（ただし $x_1<x_2$）の x 座標 x_1，x_2 がともに負になるような k の値の範囲を求めよ．

以下では $a=\sqrt{3}$ とし，k は(2)で求めた範囲を動くものとする．

(3)　△OQR の面積 S を k で表せ．

(4)　S の最大値を求めよ．

3　次の空欄に当てはまる数を答えよ．

a，b を実数の定数とし，x の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=x^3+(2a+4)x^2+(8a+b)x+2ab$$

とする．

(1)　関数 $f(x)$ が極値をもつ必要十分条件は

$$b<\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}(a^2-\boxed{\text{ウ}}\,a+\boxed{\text{エ}})$$

である．

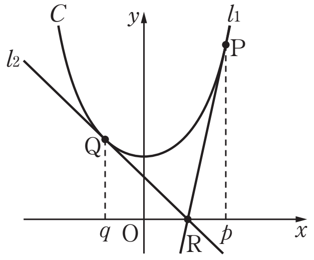
(2)　方程式 $f(x)=0$ が相異なる３つの実数解 α，β，γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ をもつとする．
$\beta=-2a$ となるための必要十分条件は

$$b<-\boxed{\text{オ}}\,a^2+\boxed{\text{カ}}\,a$$

である．このとき，$\alpha^2+\gamma^2=\boxed{\text{キク}}-\boxed{\text{ケ}}\,b$ であり，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた２つの部分の面積が等しくなるのは $a=\boxed{\text{コ}}$ のときである．

(3)　曲線 $y=f(x)$ と y 軸との交点を A とする．点 A を通る $y=f(x)$ の接線がただ１本となるのは $a=-\boxed{\text{サ}}$ のときである．

第３講　微分・積分



1 ［1］ $C : y=x^2+1$ より $y'=2x$

よって，点 $(t,\ t^2+1)$ における C の接線の方程式は

$y=2t(x-t)+(t^2+1)$　つまり $y=2tx-t^2+1$

よって，$l_1 : y=2px-p^2+1$，$l_2 : y=2qx-q^2+1$

$2px-p^2+1=2qx-q^2+1$ より

$2(p-q)x=p^2-q^2$

よって，点 R の x 座標は $x=\dfrac{p+q}{2}$ であり，

y 座標は $y=2p\cdot\dfrac{p+q}{2}-p^2+1=pq+1$ である．

点 R は x 軸上にあることから，$pq+1=0$　よって $q=-\dfrac{1}{p}$

$r=\dfrac{p+q}{2}$ とおくと，放物線 C と l_1，l_2 で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_q^r\{(x^2+1)-(2qx-q^2+1)\}\,dx+\int_r^p\{(x^2+1)-(2px-p^2+1)\}\,dx$$

$$=\int_q^r(x-q)^2dx+\int_r^p(x-p)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-q)^3\right]_q^r+\left[\frac{1}{3}(x-p)^3\right]_r^p$$

$$=\frac{1}{3}(r-q)^3-\frac{1}{3}(r-p)^3$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{q-p}{2}\right)^3=\frac{1}{24}(p-q)^3+\frac{1}{24}(p-q)^3=\frac{1}{12}(p-q)^3$$

$$=\frac{1}{12}\left(p+\frac{1}{p}\right)^3$$

$p>0$ より，相加平均≧相乗平均から

$p+\dfrac{1}{p}\geqq 2\sqrt{p\cdot\dfrac{1}{p}}=2$　　等号成立は $p=\dfrac{1}{p}$　つまり $p=1$ のとき

よって S を最小にする p の値は $p=1$ であり，このとき最小値は $\dfrac{1}{12}\cdot 2^3=\dfrac{2}{3}$ である．

［2］ $y=-2x^2+4ax-a^2-4a+10=-2(x-a)^2+a^2-4a+10$

よって，放物線 C の頂点の座標は $(a,\ a^2-4a+10)$ である．

(1) $a=\dfrac{2}{3}$ のとき，放物線 C の頂点の座標は $\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{70}{9}\right)$

(2) 放物線 C は上に凸であり，頂点の y 座標は $a^2-4a+10=(a-2)^2+6>0$

よって，放物線 C は x 軸と異なる 2 点で交わり，その交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，α，β は 2 次方程式 $-2x^2+4ax-a^2-4a+10=0$ の 2 解である．

解と係数の関係より $\alpha+\beta=2a$，$\alpha\beta=\dfrac{a^2+4a-10}{2}$

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(2a)^2-4\cdot\dfrac{a^2+4a-10}{2}=2a^2-8a+20$

放物線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を S とすると

$$S=\int_\alpha^\beta(-2x^2+4ax-a^2-4a+10)\,dx$$

$$=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-2\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{3}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}(2a^2-8a+20)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\{2(a-2)^2+12\}^{\frac{3}{2}}$$

したがって，S は $a=2$ のとき最小値 $\dfrac{1}{3}\cdot12^{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{3}\cdot12\sqrt{12}=8\sqrt{3}$ をとる．

2 (1) 直線 l の方程式は $y=k(x-a)+a^3-3a$ つまり $y=kx+a^3-3a-ak$

$x^3-3x=kx+a^3-3a-ak$

$x^3-(k+3)x-a^3+3a+ak=0$

$(x-a)(x^2+ax+a^2-k-3)=0$

よって，C と l が異なる 3 点で交わるのは，$x^2+ax+a^2-k-3=0$ が a 以外の異なる 2 つの実数解をもつときである．

よって，判別式 $a^2-4\cdot1\cdot(a^2-k-3)>0$ かつ $a^2+a^2+a^2-k-3\neq0$

したがって，求める k の条件は $k>\dfrac{3}{4}a^2-3$ かつ $k\neq3a^2-3$

(2) C と l が相異なる 3 点で交わり，さらに P 以外の交点 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{R}(x_2,\ y_2)$ の x 座標 x_1，x_2 がともに負になるのは，$x^2+ax+a^2-k-3=0$ が異なる 2 つの負の解をもつときである．

$f(x)=x^2+ax+a^2-k-3$ とおくと，$f(x)=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}a^2-k-3$

$f(0)>0$ より $a^2-k-3>0$　　よって　$k<a^2-3$

$\dfrac{3}{4}a^2-k-3<0$ より $k>\dfrac{3}{4}a^2-3$

$-\dfrac{a}{2}<0$ より $a>0$（$a>1$ より満たす）

以上より $\dfrac{3}{4}a^2-3<k<a^2-3$

(3) $a=\sqrt{3}$ のとき $-\dfrac{3}{4}<k<0$

$x^2+\sqrt{3}x-k=0$ の 2 解が x_1，x_2（$x_1<x_2$）より，解と係数の関係から

$x_1+x_2=-\sqrt{3}$，$x_1x_2=-k$

また，直線 l の方程式は $y=kx-\sqrt{3}k$

よって，△OQR の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|=\frac{1}{2}\left|x_1\left(kx_2-\sqrt{3}k\right)-x_2\left(kx_1-\sqrt{3}k\right)\right|$$

$=\dfrac{1}{2}\left|\sqrt{3}\,k(x_2-x_1)\right|=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}k(x_2-x_1)$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}k\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}k\sqrt{4k+3}$

(4)　$k<0$ より $S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-k)\sqrt{4k+3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(-k)^2(4k+3)}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4k^3+3k^2}$

$g(k)=4k^3+3k^2$ とおくと $g'(k)=12k^2+6k=6k(2k+1)$

よって，右の増減表より S の最大値は

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{g\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

k	$-\frac{3}{4}$	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0
$g'(k)$		$+$	0	$-$	
$g(k)$		↗	$\frac{1}{4}$	↘	

3　(1)　$f(x)=x^3+(2a+4)x^2+(8a+b)x+2ab$ より $f'(x)=3x^2+2(2a+4)x+8a+b$

３次関数 $f(x)$ が極値をもつ必要十分条件は，$f'(x)=0$ が異なる２つの実数解をもつことであり，$f'(x)=0$ の判別式を D とすると $D>0$ である．

$\dfrac{D}{4}=(2a+4)^2-3(8a+b)>0$　よって，求める必要十分条件は $b<\dfrac{4}{3}(a^2-2a+4)$

(2)　$f(-2a)=(-2a)^3+(2a+4)\cdot(-2a)^2+(8a+b)\cdot(-2a)+2ab=0$ より，

$-2a$ は $f(x)=0$ の解の１つである．

$f(x)=0$ が相異なる３つの実数解 α，β，γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ をもち，$\beta=-2a$ となるのは，

$-2a$ が $f(x)=0$ の異なる３つの実数解のうち２番目に大きい解のときであり，

それは $-2a$ が，$f(x)$ が極値をとるときの２つの x 座標の間にあることである．

よって，$f'(-2a)<0$ より $3\cdot(-2a)^2+2(2a+4)\cdot(-2a)+8a+b<0$

したがって，求める必要十分条件は $b<-4a^2+8a$

また，$f(x)=(x+2a)(x^2+4x+b)$ と因数分解できるので，α，γ は２次方程式

$x^2+4x+b=0$ の異なる２つの実数解である．

解と係数の関係より，$\alpha+\gamma=-4$，$\alpha\gamma=b$

よって，$\alpha^2+\gamma^2=(\alpha+\gamma)^2-2\alpha\gamma=(-4)^2-2b=16-2b$

次に，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた２つの部分の面積が等しくなるのは

$\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=-\int_\beta^\gamma f(x)\,dx$ つまり $\displaystyle\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx=0$ のとき

すなわち $\displaystyle\int_\alpha^\gamma (x-\alpha)(x+2a)(x-\gamma)\,dx=0$ のときである．

ここで，$(x-\alpha)(x+2a)(x-\gamma)=x(x-\alpha)(x-\gamma)+2a(x-\alpha)(x-\gamma)$ であり，

$$\int_\alpha^\gamma x(x-\alpha)(x-\gamma)\,dx=\int_\alpha^\gamma\{x^3-(\alpha+\gamma)x^2+\alpha\gamma x\}\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{\alpha+\gamma}{3}x^3+\frac{\alpha\gamma}{2}x^2\right]_\alpha^\gamma$$

$=\dfrac{\gamma^4-\alpha^4}{4}-\dfrac{\alpha+\gamma}{3}(\gamma^3-\alpha^3)+\dfrac{\alpha\gamma}{2}(\gamma^2-\alpha^2)$

$$=\frac{1}{4}(\gamma^2+\alpha^2)(\gamma^2-\alpha^2)-\frac{(\gamma+\alpha)}{3}(\gamma-\alpha)(\gamma^2+\gamma a+\alpha^2)+\frac{\alpha\gamma(\gamma^2-\alpha^2)}{2}$$

$$=\frac{1}{12}(\gamma+\alpha)(\gamma-\alpha)\{3(\gamma^2+\alpha^2)-4(\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2)+6\alpha\gamma\}$$

$$=\frac{1}{12}(\gamma+\alpha)(\gamma-\alpha)(-\gamma^2+2\gamma\alpha-\alpha^2)=-\frac{1}{12}(\gamma+\alpha)(\gamma-\alpha)^3$$

$$\int_\alpha^\gamma 2a(x-\alpha)(x-\gamma)\,dx=2a\times\left\{-\frac{1}{6}(\gamma-\alpha)^3\right\}=-\frac{a}{3}(\gamma-\alpha)^3$$

であることより，

$$-\frac{1}{12}(\gamma+\alpha)(\gamma-\alpha)^3-\frac{a}{3}(\gamma-\alpha)^3=0$$

$\gamma\neq\alpha$ より $-\frac{1}{12}(\gamma+\alpha)-\frac{a}{3}=0$　　これと $\alpha+\gamma=-4$ より $a=1$

(3)　曲線 $y=f(x)$ の $x=t$ における接線の方程式は

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

これが点 A$(0,\ 2ab)$ を通るとき，

$$2ab=-f'(t)t+f(t)$$

$$=-\{3t^2+2(2a+4)t+(8a+b)\}t+t^3+(2a+4)t^2+(8a+b)t+2ab$$

$t^3+(a+2)t^2=0$　　よって $t=0,\ -a-2$

点 A を通る接線がただ１本のとき，接点はただ１つ．

したがって，$-a-2=0$ より $a=-2$